

<https://doi.org/10.21869/2223-1536-2025-15-4-89-106>

УДК 617.58

## Математическое моделирование движения стопы при ходьбе по подвижному горизонтальному основанию

С. Ф. Яцун<sup>1</sup>✉, Г. А. Фурсов<sup>1</sup>, А. А. Сидорова<sup>1</sup><sup>1</sup> Юго-Западный государственный университет

ул. 50 лет Октября, д. 94, г. Курск 305040, Российская Федерация

✉ e-mail: teormeh@inbox.ru

### Резюме

**Цель исследования** – разработка математической модели, описывающей биомеханические и антропометрические параметры человека в процессе ходьбы в различных режимах (медленная и быстрая походка). Создаваемая модель предназначена для интеграции в систему управления реабилитационными экзоскелетами с целью динамической коррекции двигательного паттерна на основе обработки кинематических данных в реальном времени. Дополнительной задачей является определение характеристик модели, используемой для адаптации к индивидуальным особенностям пользователя.

**Методы.** Рассматриваются экспериментальные исследования по видеосъемке захвата движения ключевых точек ноги испытуемого на беговой дорожке с последующей обработкой данных в программном обеспечении OpenSourcePhysicsTracker. Сравнительный анализ точности аппроксимации траекторий проводился с применением полиномиальной регрессии и гармонического анализа (ряды Фурье) в пакете Curve Fitting Toolbox (MATLAB R2023a). Валидация моделей выполнена путем расчета среднеквадратической ошибки (MSE) (при этом MSE не превышала  $1,51 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2$ ) и эмпирических методов.

**Результаты.** Установлено, что тригонометрический метод (ряды Фурье) обеспечивает значительно более высокую точность аппроксимации периодических траекторий походки по сравнению с полиномиальным методом, что подтверждается меньшими значениями среднеквадратической ошибки. Полиномиальная модель демонстрировала неустойчивое поведение при порядках выше 7-го, проявляя склонность к сильным отклонениям в концевых участках интервала. Для гармонической модели оптимальное число компонент составило 5–7 гармоник. Получены гладкие аппроксимированные траектории для всех ключевых точек стопы и угла поворота плюснефалангового сустава, представлены коэффициенты разложения в ряд Фурье для координат по осям  $X$  и  $Z$ .

**Заключение.** Разработана эффективная методика математического моделирования траекторий движения стопы при ходьбе на основе рядов Фурье. Данный метод признан наиболее предпочтительным для описания биомеханических паттернов ходьбы. Полученные модели обладают высоким прикладным потенциалом для создания систем управления реабилитационной техникой, обеспечивая персонализацию с учетом антропометрических характеристик пациентов.

**Ключевые слова:** математическое моделирование; биомеханика ходьбы; анализ походки; ряды Фурье; полиномиальная аппроксимация; реабилитационные устройства.

**Финансирование:** Работа выполнена при поддержке Госзадания Минобрнауки России по теме «Разработка методов синтеза адаптивных и интеллектуальных робототехнических устройств и комплексов в целях расширения функциональных технологических и производственных возможностей человека» (соглашение № 075-03-2025-526).

**Конфликт интересов:** Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

© Яцун С. Ф., Фурсов Г. А., Сидорова А. А., 2025

**Для цитирования:** Яцун С. Ф., Фурсов Г. А., Сидорова А. А. Математическое моделирование движения стопы при ходьбе по подвижному горизонтальному основанию // Известия Юго-Западного государственного университета. Серия: Управление, вычислительная техника, информатика. Медицинское приборостроение. 2025. Т. 15, № 4. С. 89–106. <https://doi.org/10.21869/2223-1536-2025-15-4-89-106>

Поступила в редакцию 15.10.2025

Подписана в печать 12.11.2025

Опубликована 26.12.2025

## Mathematical modeling of gait on a movable horizontal base

Sergey F. Yatsun<sup>1</sup> ✉, Gavriil A. Fursov<sup>1</sup>, Alina A. Sidorova<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Southwest State University  
50 Let Oktyabrya Str. 94, Kursk 305040, Russian Federation

✉ e-mail: teormeh@inbox.ru

### Abstract

**Purpose of research** the is development of a mathematical model describing human biomechanical and anthropometric parameters during walking under different conditions (slow and fast gait). The developed model is intended for integration into the control system of rehabilitation exoskeletons to enable dynamic correction of movement patterns through real-time processing of kinematic data. An additional objective is the parameterization of the model for adaptation to individual user characteristics.

**Methods.** Experimental studies involved video recording of key lower limb point movements of subjects on a treadmill, with subsequent data processing in OpenSourcePhysicsTracker software. A comparative analysis of trajectory approximation accuracy was conducted using polynomial regression and harmonic analysis (Fourier series) in the Curve Fitting Toolbox (MATLAB R2023a). Model validation was performed by calculating the mean square error (MSE), where the MSE did not exceed  $1,51 \times 10^{-2} \text{ m}^2$ , along with empirical methods.

**Results.** It was established that the trigonometric method (Fourier series) provides significantly higher accuracy in approximating periodic gait trajectories compared to the polynomial method, as confirmed by lower mean square error values. The polynomial model demonstrated unstable behavior at orders above 7, showing a tendency for significant deviations at the interval endpoints. For the harmonic model, the optimal number of components was 5–7 harmonics. Smooth approximated trajectories were obtained for all key points of the foot and the rotation angle of the metatarsophalangeal joint, with Fourier series expansion coefficients presented for coordinates along the X and Z axes.

**Conclusion.** An effective methodology for mathematical modeling of foot movement trajectories during walking based on Fourier series has been developed. This method is recognized as the most preferable for describing biomechanical walking patterns. The obtained models possess high application potential for creating control systems for rehabilitation equipment, enabling personalization based on patients' anthropometric characteristics.

**Keywords:** mathematical modeling; biomechanics of walking; gait analysis; Fourier ranks; polynomial approximation; rehabilitation devices.

**Financing:** The work was supported by the State Assignment of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation on the topic "Development of methods for the synthesis of adaptive and intelligent robotic devices and complexes in order to expand the functional technological and production capabilities of humans" (Agreement N 075-03-2025-526)

**Conflict of interest:** The Authors declare the absence of obvious and potential conflicts of interest related to the publication of this article.

**For citation:** Yatsun S.F., Fursov G.A., Sidorova A.A. Mathematical modeling of gait on a movable horizontal base. *Izvestiya Yugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika, informatika. Meditsinskoe priborostroenie* = *Proceedings of the Southwest State University. Series: Control, Computer Engineering, Information Science. Medical Instruments Engineering*. 2025;15(4):89–106. (In Russ.) <https://doi.org/10.21869/2223-1536-2025-15-4-89-106>

Received 15.10.2025

Accepted 12.11.2025

Published 26.12.2025

Известия Юго-Западного государственного университета. Серия: Управление, вычислительная техника, информатика. Медицинское приборостроение. 2025;15(4):89–106

## Введение

Современная робототехника все чаще обращается к созданию высокоточных устройств [1], таких как активные протезы, экзоскелеты и роботизированные тренажерные комплексы [2], на базе которых создается реабилитационная техника нового поколения [3].

Особой проблемой является создание реабилитационных устройств нижних конечностей [4]. Одним из требований, предъявляемым к таким системам, является необходимость естественной, антропоморфной походки [5], которая способствует повышению эффективности процесса восстановления опорно-двигательного аппарата [6].

Достижение этой цели невозможно без глубокого изучения биомеханики человеческой ходьбы [7] и разработки точных математических моделей [8], описывающих движение нижних конечностей и особенно стопы [9].

Антропоморфная походка подразумевает естественные движения, имитирующие человеческую ходьбу, с учетом индивидуальных особенностей строения тела и физиологических возможностей. Различают медленную и быструю походки. Медленная походка характеризуется такой скоростью движения, при которой проекция центра масс человека все время находится в опорном полигоне, определяемым стопой. Быстрая походка отличается тем, что в опорном полигоне находится проекция центра

давления, получившая название точка нулевого момента (ZMP) [10].

Несмотря на большое число публикаций, касающихся исследования ходьбы, вопросы моделирования движения медленной и быстрой походки изучены недостаточно.

Настоящее исследование направлено на разработку математической модели, предназначенной для анализа и изучения биомеханических антропометрических параметров человека в процессе ходьбы в различных режимах.

Для выполнения поставленной цели были поставлены следующие задачи:

1. Проведение эксперимента по видеозахвату движения стопы испытуемого на беговой дорожке с последующей обработкой полученных данных в специализированном программном обеспечении.

2. Проведение сравнительного анализа методов аппроксимации с целью выбора оптимальной математической модели, обеспечивающей наибольшую точность и адекватность описания периодических траекторий биомеханических систем.

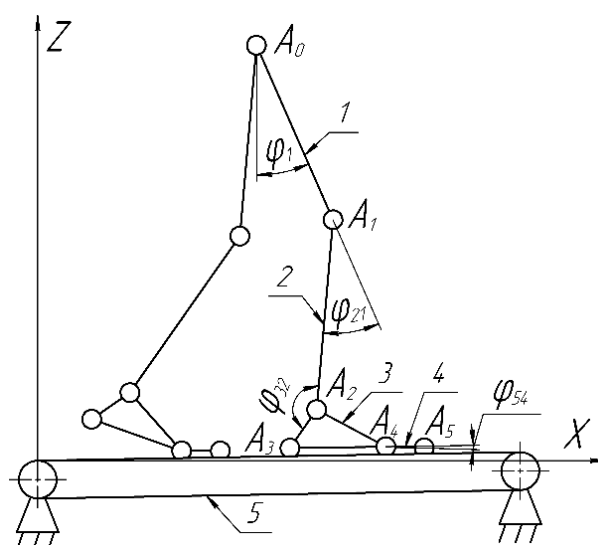
Результаты работы имеют высокую практическую значимость, так как полученные математические модели могут быть напрямую интегрированы в систему управления приводами реабилитационных устройств.

## Материалы и методы

Эксперимент по видеозахвату траектории перемещения ключевых точек

ноги во время движения на беговой дорожке направлен на изучение биомеханических особенностей ходьбы.

Рассматривается движение в сагиттальной плоскости. Схема проводимого эксперимента представлена ниже (рис. 1).



**Рис. 1.** Схема экспериментального стенда для исследования походки:

$A_0$  – бедренный сустав;  $A_1$  – коленный сустав;  $A_2$  – голеностопный сустав;  
 $A_3$  – пяточная кость;  $A_4$  – плюснефаланговый сустав;  $A_5$  – дистальная фаланга пальца;  
 $\varphi_1$  – угол поворота бедренного сустава;  $\varphi_{21}$  – угол поворота коленного сустава относительно бедренного сустава;  $\varphi_{32}$  – угол поворота стопы относительно коленного сустава;  $\varphi_5$  – абсолютный угол поворота дистальной фаланги пальца;  $\varphi_{54}$  – угол поворота дистальной фаланги пальца относительно плюснефалангового сустава; 1 – бедро; 2 – голень; 3 – плюсна; 4 – фаланги пальцев; 5 – беговая дорожка

**Fig. 1.** Scheme of the experiment:  $A_0$  – hip joint;  $A_1$  – knee joint;  $A_2$  – ankle joint;  $A_3$  – heel bone;  $A_4$  – metatarsophalangeal joint;  $A_5$  – distal phalanx of the toe;  $\varphi_1$  – hip joint rotation angle;  $\varphi_{21}$  – knee joint rotation angle relative to the hip joint;  $\varphi_{32}$  – foot rotation angle relative to the knee joint;  $\varphi_5$  – absolute rotation angle of the distal phalanx;  $\varphi_{54}$  – rotation angle of the distal phalanx relative to the metatarsophalangeal joint; 1 – thigh; 2 – shin; 3 – metatarsus; 4 – phalanges of the toes; 5 – treadmill

Рассмотрим процесс видеозахвата (рис. 2). Захват траекторий выполнялся в соответствии с ниже представленным алгоритмом. Для обработки видеоматериала использовалось программное обеспечение OpenSourcePhysicsTracker [11]. Основные характеристики пациента [12]:

- длина бедра – 0,42 м;
- длина голени – 0,44 м;
- длина свода стопы – 0,18 м;
- длина фаланг пальца – 0,08 м.

Основные характеристики беговой дорожки:

- скорость – 0–3,6 км/ч;
- угол наклона ленты – 0–3°;
- длина полотна – 1 м.

После импортирования видеоролика в среду Tracker необходимо задать начало координат, соответствующее бедренному маячку. Далее указывается калибровочный размер с помощью измерительной ленты длиной 0,80 м (рис. 2, цифра 1). Далее, можно приступить к

автоматическому захвату положения ключевых точек и записи их траекторий. Для этого создадим и укажем ключевые точки. После выполнения данного действия, можно запускать процедуру отслеживания положения точек.

После выполнения вышеописанных действий, мы получаем несколько наборов массивов с координатами (где  $t$  – время, с;  $x$  и  $z$  – пространственные координаты, м). Полученные данные использованы для анализа в программной среде MATLAB.



**Рис. 2.** Процесс видеозахвата траектории:  
 $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$  – ключевые точки;  
 1 – измерительная лента;  
 2 – беговая дорожка

**Fig. 2.** The motion capture process:  
 $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$  – tracking markers;  
 1 – measuring tape; 2 – treadmill

Для аппроксимации траектории перемещения точек существует множество различных методов [13; 14], которые характеризуются своими особенностями [15]. В данной статье для оцифровки экспериментальных данных рассматриваются

полиномиальный метод и тригонометрический метод (ряды Фурье).

Полиномиальная аппроксимация [16] – один из самых простых методов для описания траектории точек, особенно когда описываемая траектория достаточно гладкая и может быть описана полиномом заданной степени [17]. Суть полиномиальной аппроксимации заключается в том, что на основе метода наименьших квадратов (МНК) подбираются коэффициенты полинома, которые наиболее точно описывают заданную траекторию. Общая формула полинома представлена ниже:

$$f(t) = \sum_i^n a_i t^i, \quad (1)$$

где  $a$  – коэффициенты полинома;  $t$  – время;  $n$  – степень полинома, порядок аппроксимации.

Полиномиальные функции легко подвергаются дифференцированию, из-за чего упрощается анализ физических характеристик, однако полином не учитывает динамические ограничения, из-за чего он может выдавать нереалистичные результаты.

Ряд Фурье – математический инструмент, созданный для анализа периодических движений [18]. Суть метода заключается в том, что любую траекторию можно представить как сумму косинусов и синусов с разными частотами. Общая формула разложения по ряду Фурье представлена ниже:

$$f(t) = a_0 + \sum_{q=1}^N (a_q \cos(q\omega t) + b_q \sin(q\omega t)), \quad (2)$$

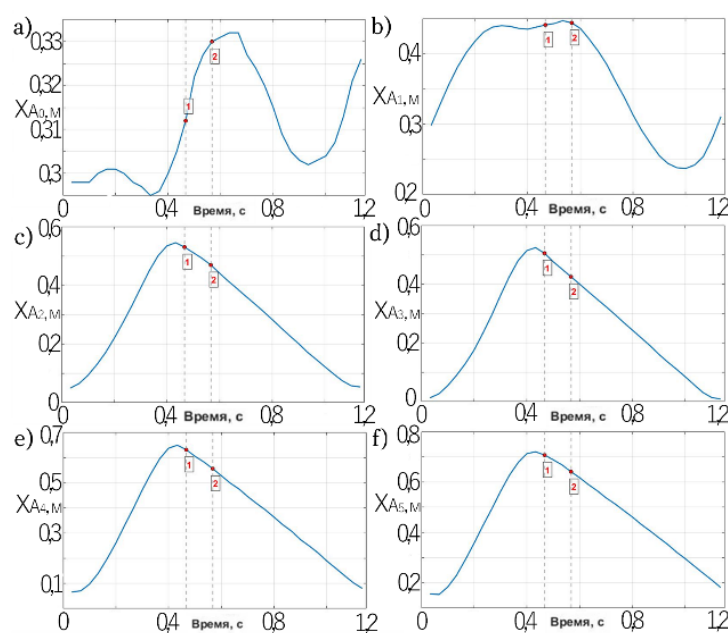
где  $a_0$  – постоянная составляющая (среднее значение функции за период);  $a_q, b_q$  – коэффициенты ряда Фурье, которые рассчитываются для каждой гармоники;  $N$  – порядок ряда;  $q$  – номер гармоники;  $\omega$  – основная круговая частота.

Применение ряда Фурье позволяет представить сложный сигнал как суперпозицию простых гармонических колебаний, каждое из которых соответствует конкретной частоте, амплитуде и фазе. При увеличении числа компонентов ряда Фурье растёт точность аппроксимированной траектории. Вместе с этим, уменьшая их количество, траектория становится более гладкой, избавляясь от

лишних шумов, что добавляет данному методу возможность фильтровать полученную траекторию.

## Результаты и их обсуждение

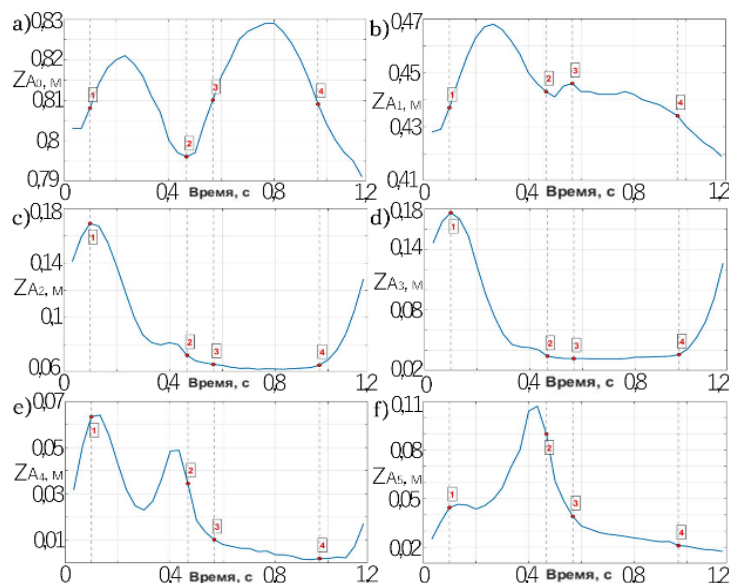
В ходе эксперимента были получены массивы координат ключевых точек стопы в процессе движения по беговой дорожке. Эта данные представляют собой дискретные значения положений точек во времени, зафиксированные системой видеозахвата. Изменения положения каждой точки относительно оси X и оси Z представлены на рисунках 3 и 4 соответственно.



**Рис. 3.** Экспериментальная траектория движения по оси X: *a* – бедренного сустава; *b* – коленного сустава; *c* – голеностопного сустава; *d* – пяточной кости; *e* – плюснефалангового сустава; *f* – дистальной фаланги пальца; 1 – начальный контакт; 2 – полный контакт с поверхностью (пронация)

**Fig. 3.** Experimental trajectory of motion along the X-axis: *a* – hip joint; *b* – knee joint; *c* – ankle joint; *d* – heel bone; *e* – metatarsophalangeal joint; *f* – distal phalanx of the toe; 1 – initial contact; 2 – full contact with the surface (pronation)

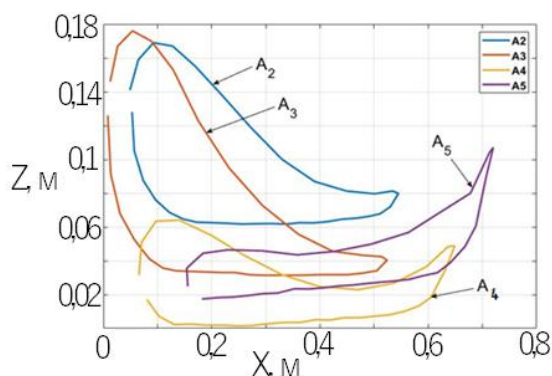




**Рис. 4.** Экспериментальная траектория движения по оси  $Z$ :  $a$  – бедренного сустава;  $b$  – коленного сустава;  $c$  – голеностопного сустава;  $d$  – пяточной кости;  $e$  – плюсневфалангового сустава;  $f$  – дистальной фаланги пальца; 1 – полный отрыв стопы от поверхности; начало маховой фазы; 2 – начальный контакт; 3 – полный контакт с поверхностью (пронация); 4 – пятка отрывается от поверхности; вес переносится на передний отдел стопы

**Fig. 4.** Experimental trajectory of motion along the  $Z$ -axis:  $a$  – hip joint;  $b$  – knee joint;  $c$  – ankle joint;  $d$  – heel bone;  $e$  – metatarsophalangeal joint;  $f$  – distal phalanx of the toe; 1 – full foot lift-off (beginning of the swing phase); 2 – initial contact; 3 – full foot contact with the surface (pronation); 4 – heel lift-off (weight transfer to the forefoot)

Рассмотрим общий вид траектории ключевых точек стопы (рис. 5).



**Рис. 5.** Экспериментальная траектория перемещения ключевых точек стопы

**Fig. 5.** Experimental trajectory of the main points of the foot

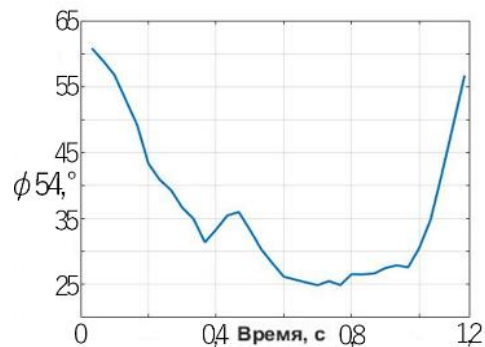
Определим закон изменения относительного угла поворота стопы относительно голени (угол  $\varphi_{54}$  на рис. 6).

Угол  $\varphi_{54}$ :

$$\operatorname{tg} \varphi_5 = \frac{z_{A_5} - z_{A_4}}{x_{A_5} - x_{A_4}}, \quad (3)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_4 = \frac{z_{A_4} - z_{A_3}}{x_{A_4} - x_{A_3}}, \quad (4)$$

$$\varphi_{54} = \varphi_5 - \varphi_4. \quad (5)$$



**Рис. 6.** Экспериментальное изменение угла  $\varphi_{54}$

**Fig. 6.** Experimental change in angle  $\varphi_{54}$

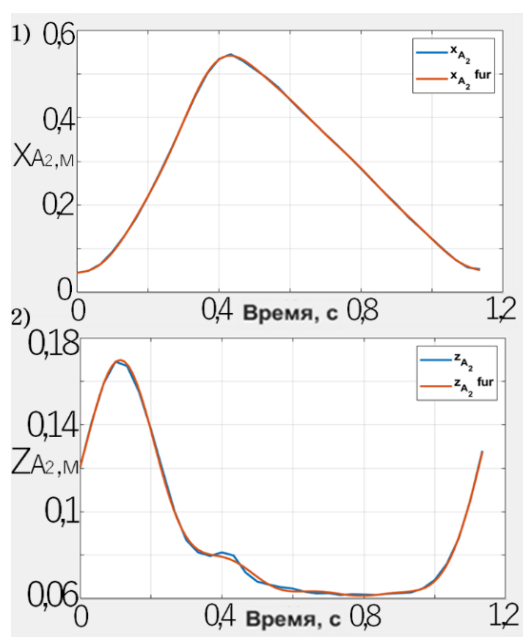
Для определения наиболее подходящего метода для построения траекторий в программной среде MATLAB с помощью пакета CurveFittingTool [19] был проведён сравнительный анализ полиномиального и тригонометрического методов. Сравнение производилось с помощью расчёта среднеквадратической ошибки  $E$ , формула которой представлена ниже, и визуального анализа построенных траекторий:

$$E = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (y_i - f(t_i))^2, \quad (6)$$

где  $M$  – количество наблюдений;  $y_i$  – фактическое значение для  $i$ -го наблюдения для осей  $Z$  и  $X$ ;  $f(t_i)$  – прогнозируемое значение для  $i$ -го наблюдения.

Графики построенных траекторий, полученные с помощью тригонометрического и полиномиального методов, представлены ниже (рис. 7 и 8).

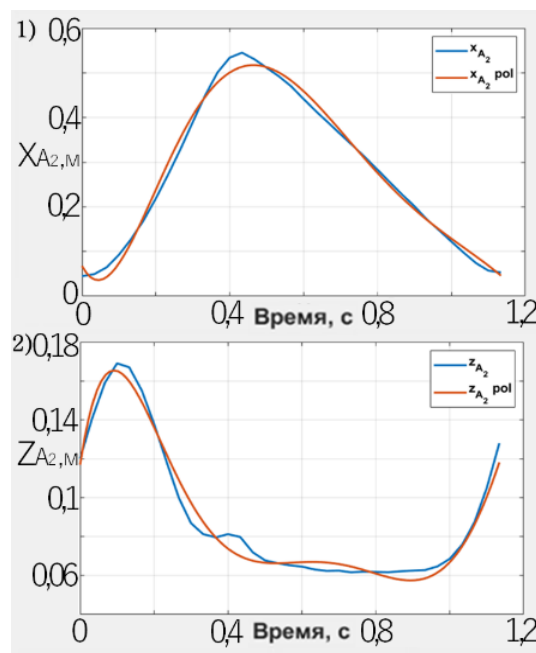
При повышении порядка наблюдения больше совпадение аппроксимированной траектории с первоначальной, что выражается в уменьшении среднеквадратической ошибки представленной ниже (табл. 1). Но при повышении порядка полинома, начиная с 8-го порядка, траектория считается некорректно (рис. 9). Подобное происходит по причине того, что рассчитанные коэффициенты имеют слишком большое значение. При ограничении коэффициентов полином даёт более приближенные значения.



**Рис. 7.** Траектория движения голеностопного сустава, полученная с помощью ряда Фурье 6-го порядка: 1 – изменение положения по оси  $X$ ; 2 – изменение положения по оси  $Z$ ;  $x_{A_2}$ ,  $z_{A_2}$  – реальная траектория;  $x_{A_2 fur}$ ,  $z_{A_2 fur}$  – аппроксимированная траектория

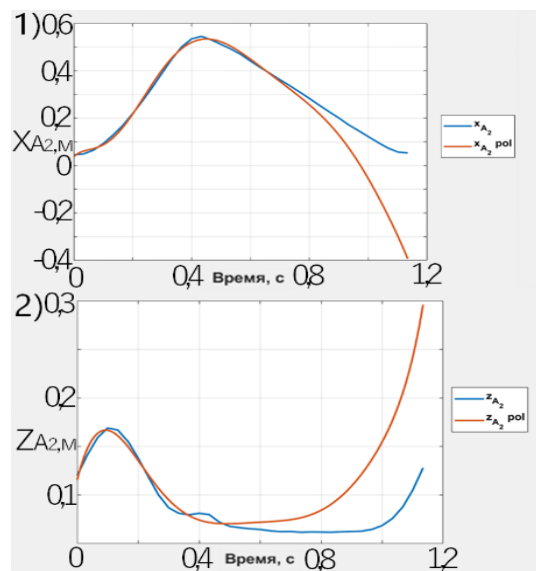
**Fig. 7.** Trajectory of the ankle joint motion obtained using a 6th order Fourier series: 1 – position change along the  $X$ -axis; 2 – position change along the  $Z$ -axis;  $x_{A_2}$ ,  $z_{A_2}$  – actual trajectory;  $x_{A_2 fur}$ ,  $z_{A_2 fur}$  – approximated trajectory





**Рис. 8.** Траектория движения голеностопного сустава, полученная с помощью полинома 6-го порядка: 1 – изменение положения по оси  $X$ ; 2 – изменение положения по оси  $Z$ ;  $x_{A_2}$ ,  $z_{A_2}$  – реальная траектория;  $x_{A_2} pol$ ,  $z_{A_2} pol$  – аппроксимированная траектория

**Fig. 8.** Trajectory of the ankle joint motion obtained using a 6th-order polynomial: 1 – position change along the  $X$ -axis; 2 – position change along the  $Z$ -axis;  $x_{A_2}$ ,  $z_{A_2}$  – actual trajectory;  $x_{A_2} pol$ ,  $z_{A_2} pol$  – approximated trajectory



**Рис. 9.** Траектория движения голеностопного сустава, полученная с помощью полинома 8-го порядка: 1 – изменение положения по оси  $X$ ; 2 – изменение положения по оси  $Z$ ;  $x_{A_2}$ ,  $z_{A_2}$  – реальная траектория;  $x_{A_2} pol$ ,  $z_{A_2} pol$  – аппроксимированная траектория

**Fig. 9.** Trajectory of the ankle joint motion obtained using a 8th-order polynomial: 1 – position change along the  $X$ -axis; 2 – position change along the  $Z$ -axis;  $x_{A_2}$ ,  $z_{A_2}$  – actual trajectory;  $x_{A_2} pol$ ,  $z_{A_2} pol$  – approximated trajectory

**Таблица 1.** Рассчитанные значения среднеквадратической ошибки**Table 1.** Calculated MSE (meansquare error) values

Метод	Ось	Ошибка
Ряд Фурье 6-го порядка	X	$2,08 \cdot 10^{-6}$
	Z	$9,79 \cdot 10^{-7}$
Ряд Фурье 7-го порядка	X	$1,94 \cdot 10^{-6}$
	Z	$4,49 \cdot 10^{-7}$
Ряд Фурье 8-го порядка	X	$5,18 \cdot 10^{-7}$
	Z	$2,06 \cdot 10^{-7}$
Полином 6-го порядка	X	$2,37 \cdot 10^{-4}$
	Z	$2,45 \cdot 10^{-5}$
Полином 7-го порядка	X	$9,14 \cdot 10^{-5}$
	Z	$1,82 \cdot 10^{-5}$
Полином 8-го порядка	X	$1,51 \cdot 10^{-2}$
	Z	$2,7 \cdot 10^{-3}$
Полином 8-го порядка с ограничением коэффициентов	X	$1,53 \cdot 10^{-4}$
	Z	$1,65 \cdot 10^{-5}$

В связи с полученными результатами вполне логичным решением для построения траектории ходьбы является тригонометрический метод. В результате аппроксимации с помощью функции Фурье  $N$ -го порядка была получена

гладкая траектория для каждой характерной точки стопы. Коэффициенты разложения функции представлены в таблицах 2 и 3, графический результат аппроксимации – на рисунках 10 и 11.

**Таблица 2.** Коэффициенты разложения функции по оси X для точек  $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$ **Table 2.** Coefficients of the function expansion along the X-axis for the points  $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$ 

$n$	Для $x_{A_0}(t)$	
	$a_n$	$b_n$
0	0,3	—
1	−0,02	$0,63 \cdot 10^{-2}$
2	−0,005	$0,36 \cdot 10^{-2}$
3	$0,82 \cdot 10^{-2}$	0,02
4	$0,64 \cdot 10^{-2}$	$0,86 \cdot 10^{-4}$
5	$0,21 \cdot 10^{-2}$	$-0,47 \cdot 10^{-2}$
6	$0,2 \cdot 10^{-3}$	$-0,21 \cdot 10^{-2}$

Окончание табл. 2 / Table 2 (ending)

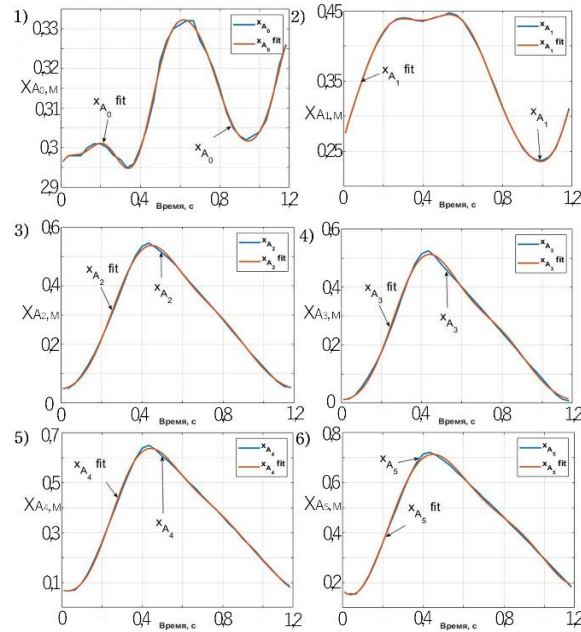
$n$	Для $x_{A_1}(t)$	
	$a_n$	$b_n$
0	-0,26	—
1	-0,17	1,11
2	0,71	0,31
3	0,19	-0,43
4	-0,18	-0,07
5	-0,03	0,05
	Для $x_{A_2}(t)$	
	$a_n$	$b_n$
0	0,23	—
1	-0,21	0,09
2	-0,03	-0,04
3	0,01	$0,42 \cdot 10^{-5}$
	Для $x_{A_3}(t)$	
	$a_n$	$b_n$
0	0,24	—
1	-0,22	0,08
2	-0,03	-0,05
3	0,01	$0,26 \cdot 10^{-2}$
	Для $x_{A_4}(t)$	
	$a_n$	$b_n$
0	0,34	—
	Для $x_{A_4}(t)$	
	$a_n$	$b_n$
1	-0,25	0,08
2	-0,04	-0,06
3	0,01	$-0,49 \cdot 10^{-5}$
	Для $x_{A_5}(t)$	
	$a_n$	$b_n$
0	0,47	—
1	0,04	0,02
2	-0,22	-0,14
3	-0,12	$-0,18 \cdot 10^{-2}$

**Таблица 3.** Коэффициенты разложения функции по оси  $Z$  для точек  $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$ **Table 3.** Coefficients of the function expansion along the  $Z$ -axis for the points  $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$ 

$n$	Для $z_{A_0}(t)$	
	$a_n$	$b_n$
0	0,8	—
1	−0,015	0,02
2	0,013	0,012
3	$0,45 \cdot 10^{-3}$	$0,6 \cdot 10^{-2}$
4	$0,79 \cdot 10^{-4}$	$-0,5 \cdot 10^{-2}$
5	$0,28 \cdot 10^{-4}$	$-0,3 \cdot 10^{-2}$
	Для $z_{A_1}(t)$	
	$a_n$	$b_n$
0	0,44	—
1	$-0,72 \cdot 10^{-3}$	0,015
2	$-0,65 \cdot 10^{-3}$	$0,46 \cdot 10^{-2}$
3	$-0,61 \cdot 10^{-2}$	$-0,4 \cdot 10^{-2}$
4	$-0,4 \cdot 10^{-2}$	$-0,4 \cdot 10^{-2}$
5	$-0,47 \cdot 10^{-3}$	$-0,2 \cdot 10^{-2}$
	Для $z_{A_2}(t)$	
	$a_n$	$b_n$
0	0,09	—
1	0,04	$0,11 \cdot 10^{-2}$
	Для $z_{A_2}(t)$	
	$a_n$	$b_n$
2	$-0,27 \cdot 10^{-3}$	$0,46 \cdot 10^{-2}$
3	−0,01	0,02
4	$-0,76 \cdot 10^{-2}$	0,02
5	$-0,1 \cdot 10^{-2}$	$0,89 \cdot 10^{-2}$
6	$0,22 \cdot 10^{-2}$	$0,1 \cdot 10^{-2}$
7	$0,21 \cdot 10^{-2}$	$-0,44 \cdot 10^{-3}$
	Для $z_{A_3}(t)$	
	$a_n$	$b_n$

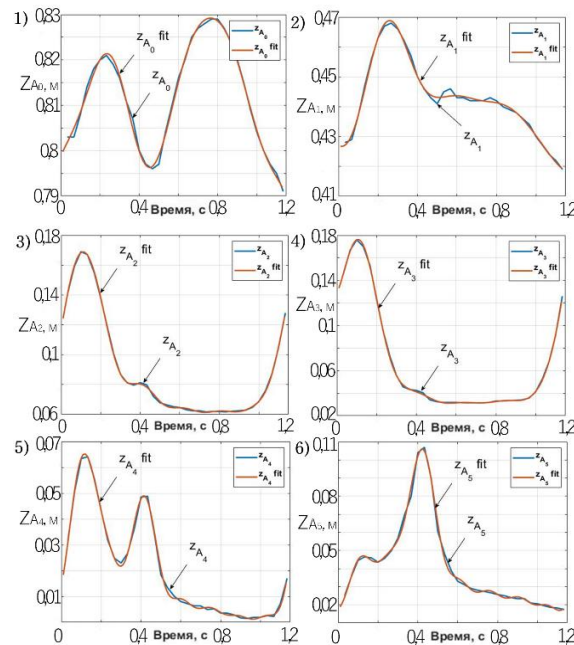
Окнчание табл. 3 / Table 3 (ending)

$n$	Для $z_{A_3}(t)$	
	$a_n$	$b_n$
0	0,12	–
1	0,1	–0,09
2	–0,02	–0,06
3	–0,05	0,02
4	–0,02	0,03
5	$-0,35 \cdot 10^{-2}$	0,02
6	$-0,43 \cdot 10^{-3}$	$0,52 \cdot 10^{-2}$
	Для $z_{A_4}(t)$	
	$a_n$	$b_n$
0	0,02	–
1	$0,45 \cdot 10^{-2}$	0,02
2	$0,43 \cdot 10^{-3}$	$0,61 \cdot 10^{-2}$
3	$0,43 \cdot 10^{-3}$	0,01
4	$-0,87 \cdot 10^{-2}$	$0,31 \cdot 10^{-2}$
5	$-0,1 \cdot 10^{-2}$	$-0,2 \cdot 10^{-2}$
6	$-0,95 \cdot 10^{-3}$	$0,17 \cdot 10^{-2}$
7	$-0,16 \cdot 10^{-2}$	$-0,1 \cdot 10^{-2}$
	Для $z_{A_5}(t)$	
	$a_n$	$b_n$
0	0,04	–
1	–0,02	0,02
2	$-0,38 \cdot 10^{-2}$	–0,01
3	$0,53 \cdot 10^{-2}$	$0,88 \cdot 10^{-2}$
4	$-0,86 \cdot 10^{-2}$	$0,1 \cdot 10^{-2}$
5	$0,14 \cdot 10^{-2}$	$-0,3 \cdot 10^{-2}$
6	$-0,14 \cdot 10^{-2}$	$0,22 \cdot 10^{-2}$
7	$-0,14 \cdot 10^{-2}$	$-0,2 \cdot 10^{-2}$



**Рис.10.** Траектория движения по оси X: 1 – бедренного сустава; 2 – коленного сустава; 3 – голеностопного сустава; 4 – пяточной кости; 5 – плюснефалангового сустава; 6 – дистальной фаланги пальца;  $f$  – дистальной фаланги пальца

**Fig.10.** Trajectory of movement along the X-axis: 1 - hip joint; 2 – knee joint; 3 – ankle joint; 4 – calcaneus; 5 – metatarsophalangeal joint; 6 – distal phalanx of the finger;  $f$  – distal phalanx of the finger



**Рис.11.** Траектория движения по оси Z: 1 – бедренного сустава; 2 – коленного сустава; 3 – голеностопного сустава; 4 – пяточной кости; 5 – плюснефалангового сустава; 6 – дистальной фаланги пальца;  $f$  – дистальной фаланги пальца

**Fig. 11.** Trajectory of movement along the Z axis: 1 – femoral joint; 2 – knee joint; 3 – ankle joint; 4 – calcaneus; 5 – metatarsophalangeal joint; 6 – distal phalanx of the finger;  $f$  – distal phalanx of the finger



## Выводы

Проведенное исследование позволило разработать эффективную методику математического моделирования траекторий движения нижних конечностей. Сравнительный анализ методов аппроксимации выявил преимущество тригонометрического метода (рядов Фурье) перед полиномиальным, что подтверждается значительно меньшими

значениями среднеквадратической ошибки и лучшей сходимостью с экспериментальными данными.

Полученные математические модели разработаны с целью создания систем управления реабилитационной техникой, обеспечивая персонализацию биомеханических паттернов движения с учетом антропометрических характеристик пациентов

## Список литературы

1. Оценка эффективности восстановления навыков ходьбы с помощью реабилитационного роботизированного комплекса / И. Э. Юденко, А. И. Попова, Ю. Е. Викторова, Н. В. Минникаева // Северный регион: наука, образование, культура. 2023 № 3 (55). С. 77–83.
2. Yatsun S. M., Yatsun A. S., Rukavitsyn A. N. The creation of a biomechatronic orthopedic device for the treatment of flat feet // Biomedical engineering. 2021. Vol. 54, N 5. P. 361–365.
3. Будко Р. Ю., Чернов Н. Н., Будко Н. А. Метод управления устройствами замещения утраченных функций на основе миосигнала и его верификация в реальном масштабе времени // Вестник молодёжной науки России. 2019. № 6. С. 12.
4. Геворкян А. А., Котов С. В., Лиждвой В. Ю. Роботизированная механотерапия: возможность применения экзоскелета для нижних конечностей у пациентов с нарушением функции ходьбы при рассеянном склерозе // Альманах клинической медицины. 2020. № 1. С. 7–12.
5. Куст С. Ю., Маркова М. В., Писарева А. В. Разработка алгоритма определения местности в системе управления протезом нижней конечности // Системный анализ и управление в биомедицинских системах. 2021. Т. 20, № 2. С. 99–105.
6. Князев А. А., Яцун С. Ф., Федоров А. В. Управление прибором для механотерапии голеностопного сустава // Медицинская техника. 2022. № 6(336). С. 14.
7. Zaichenko K. V., Gurevich B. S. Spectral processing of bioelectric signals // Medical equipment. 2021. N 1 (325). P. 12–14.
8. Samsonov I., Taratonov I. Modular Scalable System for Registration of Biomedical Indicators of Activity of the Exoskeleton User // Proceedings of the Computational Methods in Systems and Software. Cham: Springer International Publishing, 2022. P. 647–655.
9. Смирнова Л. М., Пономаренко Г. Н., Сусяев В. Г. Методология и информационно-измерительная система для персонифицированного синтеза протезов нижних

конечностей // Информационно-управляющие системы. 2021. № 6. С. 64–74. <https://doi.org/10.31799/1684-8853-2021-6-64-74>

10. Trajectory optimization for wheeled-legged quadrupedal robots using linearized ZMP constraints / Y. De Viragh, M. Bjelonic [et al.] // IEEE Robotics and Automation Letters. 2019. Vol. 4. P. 1633–1640.

11. Котов Е. А., Друк А. Д., Клыпин Д. Н. Разработка экзоскелета нижних конечностей человека для медицинской реабилитации // Омский научный вестник. 2021. № 4 (178). С. 91–97. <https://doi.org/10.25206/1813-8225-2021-178-91-97>

12. Modelling for design and evaluation of industrial exoskeletons: A systematic review / T. Ma, Y. Zhang, S. D. Choi, S. Xiong // Applied Ergonomics. 2023. N 113. P. 104100.

13. Везарко Д. А. Статистический анализ и моделирование данных в MATLAB // International Journal of Humanities and Natural Sciences. 2024. N 6. P. 187–192. <https://doi.org/10.24412/2500-1000-2024-6-1-187-192>

14. Samsonov I., Taratonov I. Modular Scalable System for Registration of Biomedical Indicators of Activity of the Exoskeleton User // Proceedings of the Computational Methods in Systems and Software. Cham: Springer International Publishing, 2022. P. 647–655.

15. Влияние роботизированных тренировок на биомеханику голеностопного сустава у пациентов с постинсультным парезом / А. С. Клочков, А. А. Зимин, А. Е. Хижникова, Н. А. Супонева, М. А. Пирадов // Вестник Российского государственного медицинского университета. 2020. № 5. С. 28–32.

16. Жмудь В. А., Димитров Л. В. Вычисление желаемых коэффициентов характеристического уравнения замкнутой системы автоматического управления // Автоматика и программная инженерия. 2016. № 1 (15). С. 58–66.

17. Киселёва В. А., Рыжкова М. Н. Разработка математической модели и алгоритмов для системы построения аппроксимирующего полинома // Радиотехнические и телекоммуникационные системы. 2022. № 4. С. 69–78.

18. Применение рядов Фурье / Н. А. Юсупов, Ш. Ш. Ахоров, А. Ж. Нормуродов, С. Ш. Амонбоев, Н. Х. Суюнова // Наука, образование и культура. 2025. № 3 (73). С. 1–4.

19. Curve Fitting Toolbox™ User's Guide (R2023a) // MathWorks. URL: <https://www.mathworks.com/help/curvefit/> (дата обращения: 19.09.2025).

## References

1. Yudenko I.E., Popova A.I., Viktorova Yu.E., Minnikaeva N.V. Evaluation of the effectiveness of walking skills restoration using a robotic rehabilitation complex. *Severnny Region: Nauka, Obrazovanie, Kultura = Northern region: science, education, culture*. 2023;(3):77–83. (In Russ.)

2. Yatsun S.M., Yatsun A.S., Rukavitsyn A.N. The creation of a biomechatronic orthopedic device for the treatment of flat feet. *Biomedical Engineering*. 2021;54(5):361–365.

3. Budko R.Yu., Chernov N.N., Budko N.A. A method for controlling lost function replacement devices based on myosignal and its real-time verification. *Bulletin of Youth Science of Russia = Vestnik Molodezhnoy Nauki Rossii*. 2019;(6):12. (In Russ.)
4. Gevorkyan A.A., Kotov S.V., Lizhdva V.Yu. Robotic mechanoteria: the possibility of using an exoskeleton for the lower extremities in patients with impaired walking function in multiple sclerosis. *Al'manakh klinicheskoi meditsiny = Almanac of Clinical Medicine*. 2020;(1):7–12. (In Russ.)
5. Bush S.Yu., Markova M.V., Pisareva A.V. Development of an algorithm for determining the terrain in the management system of a prosthetic lower limb. *Sistemnyi analiz i upravlenie v biomeditsinskikh sistemakh = System analysis and management in biomedical systems*. 2021;20(2):99–105. (In Russ.)
6. Knyazev A.A., Yatsun S.F., Fedorov A.V. Control of the ankle joint mechanic-rapy device. *Meditsinskaya tekhnika = Medical equipment*. 2022;6(336):14. (In Russ.)
7. Zaichenko K.V., Gurevich B. S. Spectral processing of bioelectric signals. *Medicalequipment*. 2021;(1):12–14.
8. Samsonov I., Taratonov I. Modular Scalable System for Registration of Biomedical Indicators of Activity of the Exoskeleton User. *Proceedings of the Computational Methods in Systems and Software*. Cham: Springer International Publishing, 2022. P. 647–655.
9. Smirnova L.M., Ponomarenko G.N., Suslyayev V.G. Methodology and information and measuring system for personalized synthesis of prostheses of lower limbs. *Informatsionno-upravlyayushchie sistemy = Information and Control Systems*. 2021;(6):64–74. (In Russ.) <https://doi.org/10.31799/1684-8853-2021-6-64-74>
10. Viragh Y. De, Bjelonic M., et al. Trajectory optimization for wheeled-legged quadrupedal robots using linearized ZMP constraints. *IEEE Robotics and Automation Letters*. 2019;4:1633–1640.
11. Kotov E.A., Druk A.D., Klypin D.N. Development of the exoskeleton of the lower necessities of man for medical rehabilitation. *Omskii nauchnyi vestnik = Omsk Scientific Bulletin*. 2021;(4):91–97. (In Russ.) <https://doi.org/10.25206/1813-8225-2021-178-91-97>
12. Ma T., Zhang Y., Choi S.D., Xiong S. Modelling for design and evaluation of industrial exoskeletons: A systematic review. *Applied Ergonomics*. 2023;(113):104100.
13. Vezarko D.A. Statistical analysis and modeling in MATLAB. *International Journal of Humanities and Natural Sciences*. 2024;(6):187–192. (In Russ.) <https://doi.org/10.24412/2500-1000-2024-6-1-187-192>
14. Samsonov I., Taratonov I. Modular Scalable System for Registration of Biomedical Indicators of Activity of the Exoskeleton User. In: *Proceedings of the Computational Methods in Systems and Software*. Cham: Springer International Publishing; 2022. P. 647–655.
15. Klochkov A.S., Zimin A.A., Khizhnikova A.E., Suponeva N.A., Piradov M.A. The effect of robotic training on ankle biomechanics in patients with post-stroke paresis. *Vestnik*

*Rossiiskogo gosudarstvenno-go meditsinskogo universiteta = Bulletin of the Russian State Medical University*. 2020;(5):28–32. (In Russ.)

16. Zhmud V.A., Dimitrov L.V. Calculation of the desired coefficients of the characteristic equation of a closed automatic control system. *Avtomatika i programmaya inzheneriya = Automatics and Software Engineering*. 2016;(1):58–66. (In Russ.)

17. Kiseleva V.A., Ryzhkova M.N. Development of a mathematical model and algorithms for the approximation polynomial construction system. *Radiotekhnicheskie i telekommunikatsionnye sistemy = Radio and Telecommunication Systems*. 2022;(4):69–78. (In Russ.)

18. Yusupov N.A., Akhrorov Sh.Sh., Normurodov A.Zh., Amonboev S.Sh., Suyunova N.Kh. Application of Fourier series. *Nauka, obrazovanie i kul'tura = Science, Education and Culture*. 2025;(3):1–4. (In Russ.)

19. Curve Fitting Toolbox™ User's Guide (R2023a). MathWorks. Available at: <https://www.mathworks.com/help/curvefit/> (accessed 19.09.2025).

---

### Информация об авторах / Information about the Authors

**Яцун Сергей Федорович**, доктор технических наук, профессор кафедры механики, мехатроники и робототехники, Юго-Западный государственный университет, г. Курск, Российская Федерация, e-mail: teormeh@inbox.ru, Researcher ID: 109404, ORCID: 0000-0002-7420-0772

**Sergey F. Yatsun**, Doctor of Sciences (Engineering), Professor at the Department of Mechanics, Mechatronics and Robotics, Southwest State University, Kursk, Russian Federation, e-mail: teormeh@inbox.ru, Researcher ID: 109404, ORCID: 0000-0002-7420-0772

**Фурсов Гавриил Анатольевич**, магистрант кафедры механики, мехатроники и робототехники, Юго-Западный государственный университет, г. Курск, Российская Федерация, e-mail: from.skveki1@mail.ru, ORCID: 0009-0002-1889-4586

**Gavriil A. Fursov**, Undergraduate of the Department of Mechanics, Mechatronics and Robotics, Southwest State University, Kursk, Russian Federation, e-mail: from.skveki1@mail.ru, ORCID: 0009-0002-1889-4586

**Сидорова Алина Александровна**, студент кафедры механики, мехатроники и робототехники, Юго-Западный государственный университет, г. Курск, Российская Федерация, e-mail: limonadni1.jam@gmail.com

**Alina A. Sidorova**, Student of the Department of Mechanics, Mechatronics and Robotics, Southwest State University, Kursk, Russian Federation, e-mail: limonadni1.jam@gmail.com